# ملخص الجبر

## الصف الثالث الثانوى

إهداء من منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

## مبدأ العد و التباديل و التوافيق

### مبدأ العد

إذا أمكن إجراء عملية بعدة طرق مختلفة عددها م ، و فى نفس الوقت أمكن إجراء عملية أخرى بعدة طرق مختلفة عددها ن
فإن : عدد طرق إجراء العمليتين معاً = م × ن

### التباديل

$${}^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots(ن-ر+١) \quad \text{حيث : } ١ \leq ر \leq ن$$

$${}^{ن}ل_{ن} = ن! = ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots\times ٣ \times ٢ \times ١$$

$$ن! = ن \; (ن-١)!$$

$${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

$${}^{ن}ل_{٠} = ٠! = ١$$

### التوافيق

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{ر! \; (ن-ر)!} \quad \text{حيث : } ١ \leq ر \leq ن$$

$${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$$

$${}^{ن}ق_{٠} = ١ \quad ، \quad {}^{ن}ق_{١} = ن$$

إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن : ر = هـ أو ن = ر + هـ

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

## نظرية ذات الحدين

$(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + ن\, ب\, أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢}\, أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٣}\, ب^{٣}\, أ^{ن-٣} + \cdots\cdots + {}^{ن}ق_{ر}\, ب^{ر}\, أ^{ن-ر} + \cdots\cdots + ب^{ن}$

، $(أ - ب)^{ن} = أ^{ن} - ن\, ب\, أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢}\, أ^{ن-١} - {}^{ن}ق_{٣}\, ب^{٣}\, أ^{ن-٣} + \cdots\cdots + {}^{ن}ق_{ر}\, (-ب)^{ر}\, أ^{ن-ر} + \cdots\cdots + (-ب)^{ن}$

### حالة خاصة

$(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن}\, س^{ن}$

$(١ - س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \cdots + {}^{ن}ق_{ر}\, (-س)^{ر} + \cdots + {}^{ن}ق_{ن}\, (-س)^{ن}$

، $(١ + س)^{ن} + (١ - س)^{ن} = ٢\,(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \cdots)$

، $(١ + س)^{ن} - (١ - س)^{ن} = ٢\,(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \cdots)$

### الحد العام

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, (\text{الثانى})^{ر}\, (\text{الأول})^{ن-ر}$ حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .....

### الحد الأوسط و الحدين الأوسطين

(١) إذا كانت : ن زوجية يوجد حد أوسط واحد ترتيبه هو : $\frac{ن}{٢} + ١$

(٢) إذا كانت : ن فردية يوجد حدان أوسطان ترتيبهما هما : $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

### الحد المشتمل على $س^{ك}$

نوجد $ح_{ر+١}$ فى أبسط صورة ثم نضع أس س فى $ح_{ر+١}$ يساوى ك لتحصل على قيمة ر

### النسبة بين حدين متتاليين

$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$

## مجموعة الأعداد المركبة : ك = { س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، $ت^2$ = −١ }

### خواص العدد ت

$ت^{٤ن} = ١$ ، $ت^{٤ن+١} = ت$ ، $ت^{٤ن+٢} = -١$ ، $ت^{٤ن+٣} = -ت$

### تساوى عددين مركبين

إذا كان : س + ت ص = أ + ت ب

فإن : س = أ ، ص = ب

و إذا كان : س + ت ص = ٠

فإن : س = ٠ ، ص = ٠

### $ع_١ + ع_٢$

$ع_١ + ع_٢ = س_١ + س_٢ + ت ( ص_١ + ص_٢ )$

### $ع_١ \cdot ع_٢$

$ع_١ \cdot ع_٢ = ( س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢ ) + ت ( س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١ ) =$

$ل_١ ل_٢ [ حتا ( θ_١ + θ_٢ ) + ت حا ( θ_١ + θ_٢ ) ]$

$ع^٢ = ل^٢ ( حتا ٢θ + ت حا ٢θ )$

$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل} [ حتا (-θ) + ت حا (-θ) ]$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} [ حتا ( θ_١ - θ_٢ ) + ت حا ( θ_١ - θ_٢ ) ]$

### مرافق ع $( \bar{ع} )$

* $\bar{ع} = س - ت ص$
* $ع + \bar{ع} = ٢ س$
* $ع \cdot \bar{ع} = س^٢ + ص^٢$
* $\overline{ع_١ + ع_٢} = \bar{ع}_١ + \bar{ع}_٢$
* $\overline{ع_١ \cdot ع_٢} = \bar{ع}_١ \cdot \bar{ع}_٢$
* $\bar{ع} = ل [ حتا (-θ) + ت حا (-θ) ]$

### الصور المختلفة للعدد ع

**الجبرية :** ع = س + ت ص

**المثلثية :** ع = ل ( حتا θ + ت حا θ )

حيث : $ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، س = ل حتا θ ، ص = ل حا θ ، θ ∈ [ ٠ ، ٢ط [

**الأسية :** $ع = ل هـ^{ت θ}$

### نظرية ديموافر

* $( حتا θ + ت حا θ )^{ن} = حتا ن θ + ت حا ن θ$ حيث ن ∈ ص
* $( حتا θ + ت حا θ )^{\frac{١}{ك}} = حتا \frac{θ + ٢ م ط}{ك} + ت حا \frac{θ + ٢ م ط}{ك}$
* $( حتا θ + ت حا θ )^{\frac{ن}{ك}} = حتا \frac{ن θ + ٢ ن م ط}{ك} + ت حا \frac{ن θ + ٢ ن م ط}{ك}$

حيث : م = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ( ك − ١ )

# الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

## الصورة المثلثية

( حتا ٠ + ت حا ٠ ) ، ( حتا $\frac{٢}{٣}$ ط + ت حا $\frac{٢}{٣}$ ط ) ، ( حتا $\frac{٤}{٣}$ ط + ت حا $\frac{٤}{٣}$ ط )

## الصورة الجبرية

١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

## خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

- النقاط التى تمثلها تقع فى شكل أرجاند على دائرة الوحدة و تقسمها إلى ثلاث أقواس متساوية الطول
- مربع أى جذر من الجذرين التكعيبين التخيليين للواحد الصحيح يساوى الجذر الآخر و يرمز لها بالرموز : ١ ، $\omega$ ، $\omega^{٢}$
- $١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر
- $\omega - \omega^{٢} =$ ، $\omega^{٢} - \omega =$ ± $\sqrt{٣}$ ت
- القوى الصحيحة للعدد $\omega$:
  - $\omega^{٣ن} = ١$ ، $\omega^{٣ن+١} = \omega$ ، $\omega^{٣ن+٢} = \omega^{٢}$
  - $\frac{١}{\omega^{٢}} = \omega$ ، $\frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$

# المحددات

**المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف و من ن من الأعمدة و ينشأ من حذف ن ـ ١ من المتغيرات من ن من المعادلات الخطية**

## قيمة المحدد

* Δ = | أ　ب ؛ حـ　ء | = أ ء ـ ب حـ

* Δ = | أ　ب　حـ ؛ ء　هـ　و ؛ س　ع　ط | = أ | هـ　و ؛ ع　ط | ـ ب | ء　و ؛ س　ط | + حـ | ء　هـ ؛ و |

## إشارة العوامل المرافق

| + | − | + |
| − | + | − |
| + | − | + |

إذا كان ( س ـ أ ) أحد عوامل محدد فإن : س = أ تجعل قيمة المحدد = صفر

## خواص المحددات

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف ( عمود ) آخر و جمعنا الناتج فإن النتيجة تساوى صفراً | إذا تساوت العناصر المناظرة فى أى صفين ( عمودين ) فى محدد فإن قيمة المحدد = صفر | إذا بدلنا موضع صفان أو عمودان من محدد فإن قيمة المحدد الناتج = المحدد الأصلى و تخالفه فى الإشارة | قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه أو عناصر أحد أعمدته | فى أى محدد إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف لنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير |
| | إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف أو عمود فى محدد فيمكن أخذه خارج المحدد | قيمة أى محدد على الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى | فى أى محدد إذا كتبت جميع عناصر صف أو عمود كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتابتها كمجموع محددين | إذا ضربنا عناصر صف (عمود) من محدد فى عدد ما و أضفناها إلى نظائرها من عناصر صف آخر ( عمود آخر ) فإن قيمة المحدد لا تتغير |
| | | إذا كانت جميع عناصر صف أو عمود فى محدد أصفار فإن قيمته = صفر | | |

## حل المعادلات الخطية بإستخدام طريقة كرامر

: إذا كانت لدينا ٣ معادلات خطية فى المتغيرات س ، ص ، ع و كانت قيمة المحدد = Δ فإن :

س = Δس / Δ　، ص = Δص / Δ　، ع = Δع / Δ

# الجبر

## التباديل و التوافيق

### قوانين التباديل

* ${}^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots(ن-ر+١)$

حيث : $١ \leq ر \leq ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا كان الطرف الأيسر عدد ليكن ل :

(١) إذا علم ر : نحلل ل إلى عوامل ثم كتابة هذه العوامل كحاصل ضرب أعداد متتالية عددها ر ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ن

(٢) إذا علم ن : نقسم ل على ن ثم على العدد السابق له مباشرة فالسابق له مباشرة و هكذا حتى نحصل على الواحد الصحيح ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ر

* ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$ حيث : $١ \leq ر \leq ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا تساوت تبديلتين و علم ن أو ر بإختصار المضروبات

* $|\underline{ن} = {}^{ن}ل_{ن} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots\times ٣\times ٢\times ١$

(١) إذا علم الطرف الأيسر نقسمه على ١ ثم على ٢ ثم على ٣ ثم ... ثم على م حتى نحصل على العدد ١ فيكون : ن = م

(٢) إذا علم ن : نوجد الناتج بضرب ن فى الأعداد السابقة له حتى العدد ١

* $|\underline{ن} = ن\,|\underline{ن-١} = ن\,(ن-١)\,|\underline{ن-٢} = \cdots$

و يستخدم لإختصار المضروبات

* $|\underline{ن} = {}^{ن}ل_{٠} = |\underline{١} = ١$

### قوانين التوافيق

* ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}}$ أى : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}\;|\underline{ر}$

حيث : $١ \leq ر \leq ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا كانت ر معلومة بتحليل الطرف الأيسر إلى عوامل ثم كتابة هذه العوامل كحاصل ضرب أعداد متتالية عددها ر نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ن

* ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\;|\underline{ن-ر}}$ حيث : $١ \leq ر \leq ن$ ، $ن \in ط$

تستخدم إذا كانت ر غير معلومة بإختصار المضروبات

* ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ يستخدم لتبسيط التوفيق العددى إذا كان : $ر > \frac{١}{٢}\,ن$

* إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن : ر = هـ أو : ر + هـ = ن

* $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ يستخدم لإيجاد النسبة بين ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر-١}$

* لإيجاد النسبة بين ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢}$ نقسم كلاً من التوفيقتين على ${}^{ن}ق_{ر-١}$

* ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

## نظرية ذات الحدين

** إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(أ+ب)^ن = {}^نق_. \, أ^ن + {}^نق_١ \, أ^{ن-١} ب + {}^نق_٢ \, أ^{ن-٢} ب^٢ + \dots + {}^نق_ر \, أ^{ن-ر} ب^ر + \dots + {}^نق_ن \, ب^ن$$

** ملاحظات :

• $(أ-ب)^ن = {}^نق_. \, أ^ن - {}^نق_١ \, أ^{ن-١} ب + {}^نق_٢ \, أ^{ن-٢} ب^٢ - \dots + {}^نق_ر \, أ^{ن-ر} (-ب)^ر + \dots + {}^نق_ن \, (-ب)^ن$

• إذا كان : س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب فإن :

$(١+س)^ن = ١ + {}^نق_١ \, س + {}^نق_٢ \, س^٢ + \dots + {}^نق_ن \, س^ن$ " مرتب حسب قوى س التصاعدية "

، $(١-س)^ن = ١ - {}^نق_١ \, س + {}^نق_٢ \, س^٢ + \dots + {}^نق_ن \, (-س)^ن$ " مرتب حسب قوى س التصاعدية "

• $(س+أ)^ن + (س-أ)^ن = ٢ \, (ح_١ + ح_٣ + ح_٥ + \dots)$

، $(س+أ)^ن - (س-أ)^ن = ٢ \, (ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ + \dots)$

** الحد العام فى مفكوك $(س+أ)^ن$ :

$ح_{ر+١} = {}^نق_ر \, أ^ر \, س^{ن-ر}$ " يستخدم لإيجاد أى حد فى المفكوك "

** إذا كانت : ن فردية مفكوك $(س+أ)^ن$ فإن : رتبة الحد الأوسط هى : $\frac{١}{٢} ن + ١$

** إذا كانت : ن زوجية مفكوك $(س+أ)^ن$ فإن : رتبا الحدان الأوسطان هما : $\frac{١}{٢}(ن+١)$ ، $\frac{١}{٢}(ن+٣)$

** لإيجاد الحد المشتمل على $س^ك$ فى مفكوك $(س+أ)^ن$ نتبع ما يلى :

* نفرض أن $ح_{ر+١}$ الحد المشتمل على $س^ك$ ثم نكتبه فى بسط صورة

* نضع أس س = ك فنحصل على قيمة ر بشرط : ر ∈ ط

* نعوض بقيمة ر فى $ح_{ر+١}$ لنحصل على الحد المشتمل على $س^ك$

** ملاحظات :

* الحد المشتمل على $س^ك$ فى المقدار $س^م (س+أ)^ن$
هو الحد المشتمل على $س^م$ × الحد المشتمل على $س^{ك+م}$ فى المفكوك

* الحد المشتمل على $س^ك$ فى المقدار $(س+أ)^ن \pm (س+ع)^ن$
هو الحد المشتمل على $س^ك$ فى كلاً من المفكوكين

* الحد المشتمل على $س^ك$ فى المقدار $(س+أ)^ن (س+ع)^ل$
هو الحد المشتمل على $س^{م+ل}$ فى كل حد من حدود المقدار

** النسبة بين $ح_{ر+١}$ ، $ح_ر$ فى مفكوك $(س+أ)^ن$ :

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

** ملاحظات :

* لإيجاد النسبة بين الحدين $ح_{ر+٢}$ ، $ح_ر$ نقسم كلاً الحدين على $ح_{ر+١}$

* لاحظ الفرق بين $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

$$\frac{{}^نق_ر}{{}^نق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

## الأعداد المركبة

** العدد التخيلى ت

* $ت^2 = -1$

* القوى الصحيحة للعدد ت تعطي إحدى القيم : ت ، ـ ١ ، ـ ت ، ١

* قيم العدد ت تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤

* إيجاد $ت^{ن}$ حيث ن ∈ ص نقسم ن على ٤ فيكون :

$ت^{ن}$ = إحدى القيم كما بالجدول التالى :

| باقي القسمة | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ملاحظة | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| القيمة | ١ | ت | ـ ١ | ـ ت | $ت^{-1} = ت^{3} = -ت$ | $ت^{-3} = ت$ |

** مجموعة الأعداد التخيلية

هى مجموعة من الأعداد رمزها ت ، و وحدتها ت

** مجموعة الأعداد المركبة

$ك = \{ س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، ت^2 = -1 \}$

* تساوى عددين مركبين

$س_1 + ت ص_1 = س_2 + ت ص_2$ فإن : $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$

* إذا كان : س + ت ص = ٠ فإن : س = ٠ ، ص = ٠

* مجموع عددين مركبين

إذا كان : $س_1 + ت ص_1 + س_2 + ت ص_2 = (س_1 + س_2) + (ص_1 + ص_2) ت$

* حاصل ضرب عددين مركبين

$(س_1 + ت ص_1)(س_2 + ت ص_2) =$

$(س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + (س_1 ص_2 + س_2 ص_1) ت$

* خصائص جمع و ضرب الأعداد المركبة

* كلاً من عمليتى الجمع والضرب إبدالية و دامجة فى ك

* الصفر هو المحايد الجمعي ، الواحد الصحيح هو المحايد الضربي فى ك

* الضرب توزيعى على الجمع فى ك

* المعكوس الجمعي للعدد : ع = س + ت ص هو العدد : ـ ع = ـ س ـ ت ص

أى أن : ع + (ـ ع) = ٠ لكل ع ∈ ك

* الطرح فى ك : $ع_1 - ع_2 = ع_1 + (-ع_2)$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك

* المعكوس الضربي للعدد : ع = س + ت ص ≠ ٠ هو العدد :

$ع^{-1} = \frac{1}{ع} = \frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2} ت$ حيث : $س^2 + ص^2 ≠ 0$

أى أن : ع $(\frac{1}{ع})$ = ١ لكل ع ∈ ك

* القسمة فى ك : $\frac{ع_1}{ع_2} = ع_1 \times (\frac{1}{ع_2})$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك

يمكن إيجاد ناتج القسمة بضرب كلاً من المقسوم و المقسوم عليه فى العدد المرافق للمقسوم عليه

* العددان المترافقان

إذا كان : ع = س + ت ص فإن : $\overline{ع}$ = س ـ ت ص مرافق للعدد ع

* خواص العددان المترافقان

* مجموع العددين المترافقين هو عدد حقيقى = ٢ س

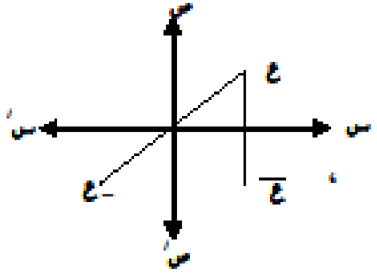
* حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد حقيقى = $س^2 + ص^2$

* المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما

* المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهما

* إذا كانت معاملات حدود معادلة ما أعداد حقيقية و كان أحد جذورها عدد مركب فإن مرافق هذا العدد يكون أيضاً جذر لهذه المعادلة

* التمثيل البيانى للأعداد المركبة " أشكال أرجاند "




الشكل المقابل : يسمى شكل أرجاند يوضح تمثيل

النقطة (س ، ص ) تمثل العدد : ع = س + ت ص ،

النقطة (ـ س ، ـ ص ) تمثل معكوسه الجمعي :

ـ ع = ـ س ـ ت ص ، النقطة ( س ، ـ ص )

مرافقه : $\overline{ع}$ = س ـ ت ص

و يلاحظ : النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و معكوسه الجمعي متماثلتين بالنسبة لنقطة الأصل ،

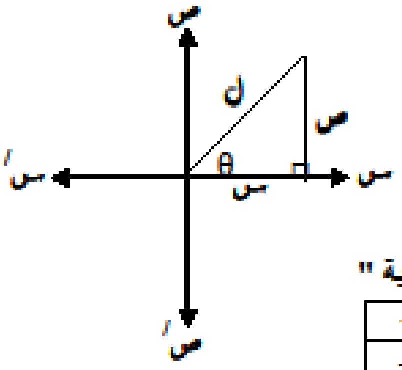
النقطتان اللتان تمثلان العدد ع و مرافقه متماثلتين بالنسبة لمحور السينات

* الصور المختلفة للعدد المركب
* الصورة الجبرية : ع = س + ت ص
* الصورة المثلثية : ع = ل ( حتا $\theta$ + ت حا $\theta$ )

حيث : ل = | ع | = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

، س = ل حتا $\theta$ ، ص = ل حا $\theta$

، $\theta$ ∈ [ ٠ ، ٢ ط [ " السعة الأساسية "




| موقع $\theta$ | الأول | الثاني | الثالث | الرابع |
|---|---|---|---|---|
| س | + | ـ | ـ | + |
| ص | + | + | ـ | ـ |

* الصورة الأسية ( صورة أويلر ) : ع = ل $\text{هـ}^{\text{ت}\theta}$
* في الشكل السابق : النقطة (س ، ص) أو ( ل ، $\theta$ ) تمثل العدد :

ع = س + ت ص أو ع = ل ( حتا $\theta$ + ت حا $\theta$ )

* الصور المثلثية لقوى العدد ت :
* ١ = ( حتا ٠ + ت حا ٠ ) " تمثله النقطة ( ١ ، ٠ )
* ـ ١ = ( حتا ط + ت حا ط ) " تمثله النقطة ( ـ ١ ، ٠ )
* ت = ( حتا $\frac{1}{2}$ ط + ت حا $\frac{1}{2}$ ط ) " تمثله النقطة ( ٠ ، ١ )
* ـ ت = ( حتا $\frac{3}{2}$ ط + ت حا $\frac{3}{2}$ ط ) " تمثله النقطة ( ٠ ، ـ ١ )
* الأشكال المختلفة للصورة المثلثية للعدد المركب ع = س + ت ص :
* ع = ل ( حا $\theta$ + ت حتا $\theta$ ) = ل ( حتا [ $\frac{1}{2}$ ط ـ $\theta$ ] + ت حا [ $\frac{1}{2}$ ط ـ $\theta$ ] )
* ع = ل ( ـ حتا $\theta$ + ت حا $\theta$ ) = ل ( حتا [ ط ـ $\theta$ ] + ت حا [ ط ـ $\theta$ ] )
* ع = ل ( ـ حا $\theta$ + ت حتا $\theta$ ) = ل ( حتا [ $\frac{1}{2}$ ط + $\theta$ ] + ت حا [ $\frac{1}{2}$ ط + $\theta$ ] )
* ع = ل ( ـ حتا $\theta$ ـ ت حا $\theta$ ) = ل ( حتا [ ط + $\theta$ ] + ت حا [ ط + $\theta$ ] )
* ع = ل ( ـ حا $\theta$ ـ ت حتا $\theta$ ) = ل ( حتا [ $\frac{3}{2}$ ط ـ $\theta$ ] + ت حا [ $\frac{3}{2}$ ط ـ $\theta$ ] )
* ع = ل ( حتا $\theta$ ـ ت حا $\theta$ ) = ل ( حتا [ ـ $\theta$ ] + ت حا [ ـ $\theta$ ] )
* ع = ل ( حا $\theta$ ـ ت حتا $\theta$ ) = ل ( حتا [ $\frac{3}{2}$ ط + $\theta$ ] + ت حا [ $\frac{3}{2}$ ط + $\theta$ ] )
* ملاحظات :
* ـ ع = ل ( ـ حا $\theta$ + ت حتا $\theta$ ) = ل ( حتا [ $\frac{1}{2}$ ط + $\theta$ ] + ت حا [ $\frac{1}{2}$ ط + $\theta$ ] )
* $\bar{\text{ع}}$ = ل ( حتا $\theta$ ـ ت حا $\theta$ ) = ل ( حتا [ ـ $\theta$ ] + ت حا [ ـ $\theta$ ] )
* $\text{ع}^{-1}$ = $\frac{1}{\text{ع}}$ = $\frac{1}{\text{ل}}$ ( حتا $\theta$ ـ ت حا $\theta$ ) = $\frac{1}{\text{ل}}$ ( حتا [ ـ $\theta$ ] + ت حا [ ـ $\theta$ ] )
* $\frac{1}{\bar{\text{ع}}}$ = $\frac{1}{\text{ل}}$ ( حتا $\theta$ + ت حا $\theta$ )
* الصور المثلثية لحاصل ضرب عددين مركبين و لخارج قسمتهما

إذا كان : $\text{ع}_1$ ، $\text{ع}_2$ عدان مركبان و كان :

$\text{ع}_1$ = $\text{ل}_1$ ( حتا $\theta_1$ + ت حا $\theta_1$ ) ، $\text{ع}_2$ = $\text{ل}_2$ ( حتا $\theta_2$ + ت حا $\theta_2$ ) فإن :

* $\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2$ = $\text{ل}_1 \cdot \text{ل}_2$ ( حتا [ $\theta_1 + \theta_2$ ] + ت حا [ $\theta_1 + \theta_2$ ] )
* ملاحظات :
* $\text{ع}^2$ = $\text{ل}^2$ ( حتا ٢ $\theta$ + ت حا ٢ $\theta$ )
* $\text{ع}^{\text{ن}}$ = $\text{ل}^{\text{ن}}$ ( حتا ن $\theta$ + ت حا ن $\theta$ ) حيث : ن عدد صحيح موجب
* $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$ = $\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$ ( حتا [ $\theta_1 - \theta_2$ ] + ت حا [ $\theta_1 - \theta_2$ ] )
* نظرية ديموافر :

إذا كان : ن عدداً نسبياً فإن : $(\text{حتا } \theta + \text{ت حا } \theta)^{\text{ن}}$ = ( حتا ن $\theta$ + ت حا ن $\theta$ )

* إذا كان : ن = $\frac{1}{\text{ك}}$ حيث ك ∈ $\text{ص}^+$ فإن :

$(\text{حا } \theta + \text{ت حتا } \theta)^{\frac{1}{\text{ك}}}$ = حتا $\frac{\theta + ٢ \text{ م ط}}{\text{ك}}$ + ت حا $\frac{\theta + ٢ \text{ م ط}}{\text{ك}}$

حيث : م = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ( ك ـ ١ )

* الجذرين التربيعين لعدد مركب

* بإستخدام الصورة المثلثية : إذا كان : ع = س + ت ص فإن :

$ع^{\frac{1}{2}} = ل^{\frac{1}{2}} (حتا θ + ت حا θ)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{ل} \left( حتا \frac{θ + ٢ ر ط}{٢} + ت حا \frac{θ + ٢ ر ط}{٢} \right)$

حيث : ر = ٠ ، ١

أى الجذرين التربيعين للعدد ع هما : $\sqrt{ل} (حتا \frac{1}{2} θ + ت حا \frac{1}{2} θ)$

، $\sqrt{ل} (حتا [ط + \frac{1}{2} θ] + ت حا [ط + \frac{1}{2} θ])$

* بإستخدام الصورة الأسية :

$ع^{\frac{1}{2}} = ل^{\frac{1}{2}} هـ^{\frac{θ + ٢ ر ط}{٢} ت}$ حيث : ر = ٠ ، ١

* بإستخدام الصورة الجبرية : إذا كان : ع = س + ت ص فإننا نفرض أن :

$ع^{\frac{1}{2}} = (س + ت ص)^{\frac{1}{2}} = أ + ب ت$ بالتربيع ينتج :

$س + ت ص = أ^٢ - ب^٢ + ٢ أ ب ت$ من خواص الأعداد المركبة نستنتج :

$أ^٢ - ب^٢ = س$ (١) لاحظ : $أ^٢ - ب^٢ > ٠$ " لأنه مقياس العدد المركب "

، ٢ أ ب = ص (٢) و بحل (١) ، (٢) ينتج :

أ ، ب و بالتالى نحصل على الجذرين التربيعين للعدد ع

* ملاحظة :

فى المعادلة (٢) إذا كان : ٢ أ ب موجب فإن : أ ، ب متشابهين فى الإشارة

أما إذا كان : ٢ أ ب سالب فإن : أ ، ب مختلفين فى الإشارة

* العمليات على الأعداد المركبة فى الصورة الأسية :

* $ل_١ هـ^{θ_١ ت} × ل_٢ هـ^{θ_٢ ت} = ل_١ ل_٢ هـ^{(θ_١ + θ_٢) ت}$

* $\frac{ل_١ هـ^{θ_١ ت}}{ل_٢ هـ^{θ_٢ ت}} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(θ_١ - θ_٢) ت}$ * $(ل هـ^{θ ت})^ن = ل^ن هـ^{ن θ ت}$

* $\sqrt[ن]{ل هـ^{θ ت}} = \sqrt[ن]{ل} هـ^{\frac{θ + ٢ ر ط}{ن} ت}$

حيث : ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، (ن − ١)

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

* الصور المثلثية : (حتا ٠ + ت حا ٠) ، $(حتا \frac{٢}{٣} ط + ت حا \frac{٢}{٣} ط)$ ، $(حتا \frac{٤}{٣} ط + ت حا \frac{٤}{٣} ط)$

* الصور الجبرية : ١ ، $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)$ ، $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)$

* الصور الرمزية : ١ ، ω ، $ω^٢$

* نتائج و ملاحظات :

* مربع أى جذر من الجذرين التخيليين يساوى الجذر التخيلى الآخر

* النقط التى تمثلها تقع فى شكل أرجاند على دائرة الوحدة و تقسمها إلى ثلاث أقواس متساوية الطول

* $١ + ω + ω^٢ = صفر$ * $ω × ω^٢ = ω^٣ = ١$

* القوى الصحيحة للعدد ω :

* القوى الصحيحة للعدد ω تعطى إحدى القيم : ١ ، ω ، $ω^٢$

* قيم العدد ω تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٣

* لإيجاد $ω^ن$ حيث ن ∈ ص نقسم ن على ٤ فيكون :

$ω^ن$ = إحدى القيم كما بالجدول التالى :

| باقي القسمة | ٠ | ١ | ٢ | ملاحظة | |
|---|---|---|---|---|---|
| القيمة | ١ | ω | $ω^٢$ | $ω^{-١} = ω^٢$ | $ω^{-٢} = ω$ |

## المحددات

* تنشأ المحددات كنتيجة لحذف عدة متغيرات من مجموعة معادلات خطية

* تعريف : المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف ( ص ) ، ن من الأعمدة ( ع )
و ينشأ من حذف ( ن ـ ١ ) من المتغيرات من ن من المعادلات الخطية
حيث العنصر : $\text{أ}_{\text{ص ع}} \in \text{ح}$ ؛ ص ، ع = ١ ، ٢ ، . . . . ، ن

* ملاحظات :

* المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الأعمدة
و ينشأ من حذف ( ن ـ ١ ) من المتغيرات من ن من المعادلات الخطية
* العوامل المرافقة لعناصر المحددات :
فى محدد الدرجة الثالثة $\text{م}_3$ إذا أخذنا العنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ الذى يقع فى الصف ص و العمود ع و حذفنا الصف ص و العمود ع فإنه ينشأ المحدد $\text{م}_2$ ، و إذا ضربنا المحدد الناتج فى $(-1)^{\text{ص}+\text{ع}}$ فإن الكمية الناتجة تسمى بالعامل المرافق للعنصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$
* العناصر $\text{أ}_{\text{ص ع}}$ من الممكن أن تكون أعداداً حقيقية أو أعداداً مركبة أو دوال حقيقية

* إشارات العوامل المرافقة لعناصر محدد الدرجة الثالثة
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

* تعيين قيمة المحدد :
* إذا كانت : ن = ١ فإن : $\text{م}_1 = |\text{أ}_{11}| = \text{أ}_{11}$
* إذا كانت : ن = ٢ فإن : $\text{م}_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix} = \text{أ}_{11}\text{أ}_{22} - \text{أ}_{12}\text{أ}_{21}$
* إذا كانت : ن = ٣ فإن : $\text{م}_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix}$

$$\text{م}_3 = \text{أ}_{11}(\text{أ}_{22}\,\text{أ}_{33} - \text{أ}_{23}\,\text{أ}_{32}) - \text{أ}_{12}(\text{أ}_{21}\,\text{أ}_{33} - \text{أ}_{23}\,\text{أ}_{31}) + \text{أ}_{13}(\text{أ}_{21}\,\text{أ}_{32} - \text{أ}_{22}\,\text{أ}_{31})$$

* خواص المحددات :
(١) فى أى محدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فإن قيمة المحدد لا تتغير
(٢) قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه ( أعمدته )
(٣) فى أى محدد إذا بدلنا موصفين ( عمودين ) فإن قيمة المحدد الناتج تساوى قيمة المحدد الأصلى مضروباً فى ( ـ ١ )
(٤) إذا تساوت العناصر المناظرة فى أى صفين ( عمودين ) فى محدد فإن قيمة المحدد تساوى صفراً
(٥) إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر أى صف ( عمود ) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
ملاحظات :
* ضرب محدد فى عدد يتطلب ضرب عناصر صف ( عمود ) فقط فى هذا العدد
* إذا كانت عناصر أى صف ( عمود ) هى مضاعفات عناصر صف ( عمود ) آخر فإن قيمة المحدد تساوى صفراً
(٦) إذا كانت جميع عناصر صف ( عمود ) فى محدد تساوى صفراً فإن قيمة المحدد تساوى صفراً
(٧) فى أى محدد إذا كتبت جميع عناصر أى صف ( عمود ) كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتابتها كمجموع قيمتى محددين
ملاحظة : " لجمع محددين لا يختلفان سوى فى عناصر أحد الصفوف ( الأعمدة ) نجمع العناصر المتناظرة فى هذين الصفين ( العمودين ) و يعاد كتابة باقى العناصر كما هى "
(٨) إذا أضفنا على عناصر أى صف ( عمود ) فى محدد فى مضاعفات أى صف ( عمود ) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير
(٩) فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف ( عمود ) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف ( عمود ) آخر و جمعنا الناتج فإن النتيجة تساوى صفراً
(١٠) قيمة أى محدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

* الصورة المثلثية للمحدد :

المحدد $م = \begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ هو محدد على الصورة المثلثية

، تسمى العناصر : $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسى ، $م = أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$

* حل المعادلات الخطية فى ثلاثة مجاهيل بطريقة كرامر :

إذا كانت المعادلات الخطية الثلاث التالية فى س ، ص ، ع و هى :

$أ_{١١}$ س + $أ_{٢١}$ ص + $أ_{٣١}$ ع = $حـ_{١}$ ،

$أ_{١٢}$ س + $أ_{٢٢}$ ص + $أ_{٣٢}$ ع = $حـ_{٢}$ ،

$أ_{١٣}$ س + $أ_{٢٣}$ ص + $أ_{٣٣}$ ع = $حـ_{٣}$ فإن :

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$ ، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta}$

حيث : $\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

* ملاحظات :

* مجموعة المعادلات لها حل وحيد إذا كانت : $\Delta \neq ٠$

* مجموعة قد يكون ليس لها أو قد يكون لها عدد لا نهائى من الحلول و هاتين الحالتين خارج نطاق المقرر

## التفاضل و التكامل

### نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

** قواعد إيجاد نهاية دالة عند نقطة

* لإيجاد $\lim_{س \to أ}$ د ( س )          نوجد د ( أ ) بالتعويض المباشر فنحصل :

(١) ل $\in$ ح فيكون هو نهاية د ( س )

(٢) $\frac{ك}{٠}$ حيث ك $\in$ ح ـ { ٠ } فتكون نهاية د ( س ) ليس لها وجود

(٣) $\frac{٠}{٠}$ فتكون نهاية د ( س ) موجودة تحدد بإحدى الطرق التالية :

* التحليل ، القسمة المطولة على العامل الصفرى ، الضرب فى المرافق إذا أحتوت الدالة على جذور تربيعية لحذف العامل الصفرى

* إذا كانت د ( س ) = $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ فإن $\lim_{س \to أ}$ د ( س ) = ن $أ^{ن - ١}$

* إذا كانت د ( س ) = $\frac{س^{\frac{ن}{م}} - أ^{\frac{ن}{م}}}{س - أ}$ فإن $\lim_{س \to أ}$ د ( س ) = $\frac{ن}{م} أ^{\frac{ن - م}{م}}$

** قواعد إيجاد نهاية الدوال المثلثية

* $\lim_{س \to ٠} \frac{حا س}{س} = ١$ حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى

* $\lim_{س \to ٠} \frac{طا س}{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{حا أ س}{ب س} = \lim_{س \to ٠} \frac{حا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

** نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

$\lim_{س \to أ}$ د ( س ) = ل          إذا و فقط إذا كان : د ( $أ^{+}$ ) = د ( $أ^{-}$ ) = ل

* ملاحظات :

* إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين و يسار أ مباشرة يلزم فى هذه الحالة بحث كل من د ( $أ^{+}$ ) = د ( $أ^{-}$ ) ثم المقارنة بينهما " إن وجدتا "

* أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار أ مباشرة فيمكن بحث نهاية مباشرة

* إذا كانت الدالة معرفة على ] أ ، ب [ أو [ أ ، ب ] فللبحث عن :

(١) $\lim_{س \to أ}$ د ( س ) يكتفى بالنهاية اليمنى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت

(٢) $\lim_{س \to ب}$ د ( س ) يكتفى بالنهاية اليسرى فقط و تعتبر هى نهاية الدالة إن وجدت